§3 分形和分维

3.1 分形的定义

分形（fractal）这个名词是 Mandelbrot[1,2]在 20 世纪 70 年代为了表征复杂图形和复杂过程首先引入自然科学领域的，它的原意是不规则的、支离破碎的物体。

分形可以分为规则分形和不规则分形。在分形名词使用之前，一些数学家就提出过不少复杂和不光滑的集合，如 Cantor 集、Koch 曲线、Sierpinski 垫片、地毯和海绵等。这些都属于规则的分形图形，它们具有严格的自相似性。而自然界的许多事物所具有的不光滑性和复杂性往往是随机的，如蜿蜒曲折的海岸线；变换无穷的布朗运动轨迹等。这类曲线的自相似性是近似的或统计意义上的，这种自相似性只存在于标度不变区域，超出标度不变区域，自相似性不复存在。这类曲线为不规则分形。

迄今为止，分形还没有一个严格的定义。1982 年 Mandelbrot 将分形定义为 Hausdorff（豪斯道夫）维数大于拓扑维数的集合。此定义强调维数，而其中的豪斯道夫维数一般不是整数，下面将介绍如何计算它。这里需要简单介绍拓扑维数。拓扑学是研究可以连续变化的图形的学科，而几何学是研究刚性图形的学科。在几何学中圆和正方形是不同的，但在拓扑学中两者是等价的，因为它们可以连续地相互变换，并且它们都将平面上的点分成三个集合：图形内、图形外和图形上的三个集合，所以它们具有共性。类似地，一条十分曲折但连续的折线和一条直线是等价的，因为它们可以连续地相互变换，而且两者的拓扑维数都是1。下面我们将结合具体的规则分形的实例说明分形的这个定义。

1986 年 Mandelbrot 给出了一个更广泛、更通俗的定义：分形是局部和整体有某种方式相似的形（A fractal is a shape made of parts similar to the whole in some way）[3]。该定义强调图形中局部和整体之间（包括小的局部和大的局部之间，如下面的 DLA 模型产生的图形中小枝杈和大枝杈）的自相似性。除了几何图形，还可以研究相空间中的轨迹等图形的自相似性，即动力学过程的自相似性。这种自相似性应该有若干层次，其尺度的变化应该尽可能大（规则分形数学上应该有无限多层次、尺度的变化可以无限大）。为了说明分形的自相似性和分数维，先看一些规则分形的例子，再接着讨论无规分形（不规则分形）。

3.2 几何图形的维数

我们从几何中知道：直线的维数是 1；方形、圆、椭圆等平面图形的维数是 2，立方体、球等立体图形的维数是 3。一般将维数理解为图形中确定一个点的位置需要的坐标数。

我们也可以将豪斯道夫测定分形维数的方法加以推广[4]，利用以下的公式从测度的角度把规则图形的维数 D 确定为

$$D = \ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{3.2.1}$$

这里的 ε 是测量单元的尺寸（测量光滑曲线用尺子、测量规则平面图形用正方形或圆、测量规则立体图形用立方体或球，测量的方法是用这些单元去连续地覆盖图形），$N(\varepsilon)$ 是测度得到的规则图形的测量单元（线段、方形和立方体）数，ε 的缩小（可以取 $\varepsilon<1$）使 $N(\varepsilon)$ 增大。如 ε 由 1 减小为 $1/2^n$ 时（n 是正整数），测量正方形得到的 $N(\varepsilon)$ 由 1 增大为 4^n，由（3.2.1）式得到维数 2；如 ε 由 1 减小为 $1/2^n$ 时，测量立方体得到的 $N(\varepsilon)$ 由 1 增大为 8^n，得到维数为 3。对于圆、椭圆等平面图形和球、椭球等立体图形，作 $\ln N(\varepsilon) \sim \ln(1/\varepsilon)$ 图，当 ε 趋于无限小时，由以上定义，从其直线部分的斜率也可以得到维数分别是 2 和 3。

3.3 规则分形和它们的分维

规则分形是一种无限多层次自相似的、支离破碎的、奇异的图形，下面举一维至三维的几个例子。

3.3.1 Cantor 集

三等分一直线，挖去中段，再把剩下的二段各三等分挖去中段，如此无限的进行下去（图 3.1）得到由无穷多离散的点组成的 Cantor 集（图中为了醒目，将线段画成有一定厚度）。

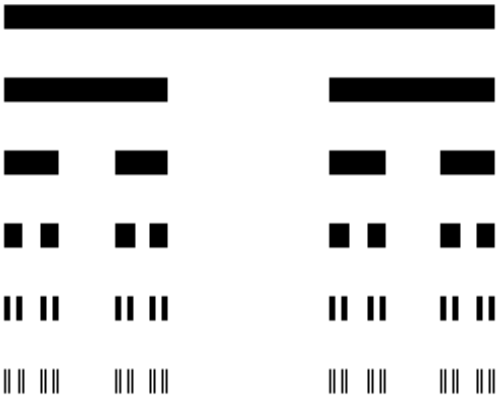


图 3.1　Cantor 集

豪斯道夫首先从测度的角度把

$$D = \ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{3.3.1}$$

应用于求各种自相似图形的维数，得到分形研究中的豪斯道夫维数（分维）[5]。用尺寸 ε 为 $(1/3)^n$（n=0，1，2，3…）的尺子测量 Cantor 集（等效于尺子不变时把图形放大 3^n 倍），只要线段内有 Cantor 集的点就予以计数，得到图形有 2^n 个单元（$N=2^n$），由上述维数定义得到的分维

$$D = \ln 2/\ln 3 = 0.631$$

3.3.2 Koch 曲线

挖去直线 1/3 中段后，加上等边三角形的二边，形成四段等长线段组成的折线，如此无限进行下去，形成处处连续、但处处不可微的 Koch 曲线（图 3.2），用尺寸为$(1/3)^n$ 的尺子测量，得到图形有 4^n 个单元($N = 4^n$)，得到的分维值是 Cantor 集的分维的 2 倍，即

$$D = \ln 4/\ln 3 = 1.262$$

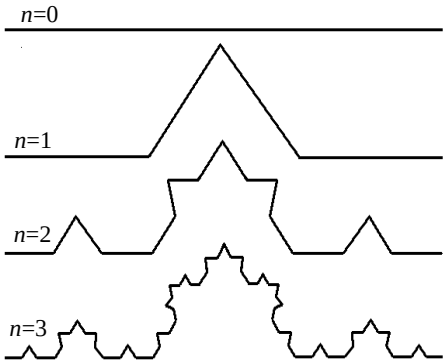


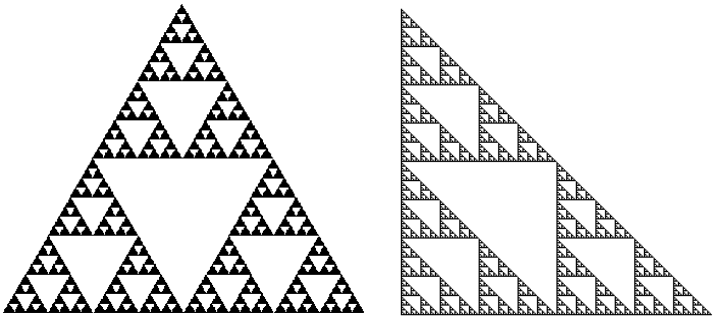
图 3.2　Koch 曲线

3.3.3 Sierpinski 图形和 Vicsek 图形

正三角形四等分成四个小三角形，挖去中间的一个，把剩下的三个小三角形四等分挖去中间的一个，如此无限的进行下去 （图 3.3（a）），得到面积趋于零、由无穷多线段组成的 Sierpinski 三角毯。此时用边长为$(1/2)^n$的正三角形测量，得到图形有 3^n 个单元($N=3^n$)，得到的分维

$$D=\ln 3/\ln 2=1.585$$

Sierpinski 三角毯的外缘也可以不是等边三角形，而是如图 3.3（b）的直角三角形，此时用直角边为 1 的直角三角形作为测量单元，不断缩小直角边尺寸为$(1/2)^n$，得到的分数维仍是 1.585。



(a) (b)

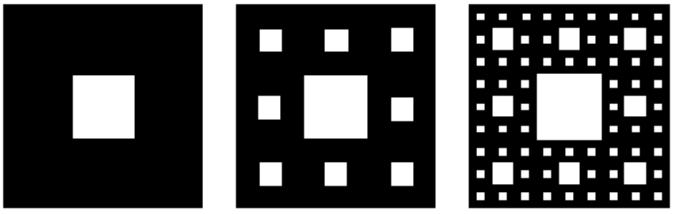
图 3.3 Sierpinski 等边三角毯(a)和直角三角毯(b)

类似地，正方形 9 等分成 9 个小正方形，挖去中间的一个，再把剩下的 8 个小正方形各 9 等分，挖去中间的一个，如此无限进行下去（图 3.4（a））。此时用尺寸为$(1/3)^n$的正方形测量，得到 Sierpinski 正方毯图形有 8^n 个单元($N=8^n$)，得到的分维

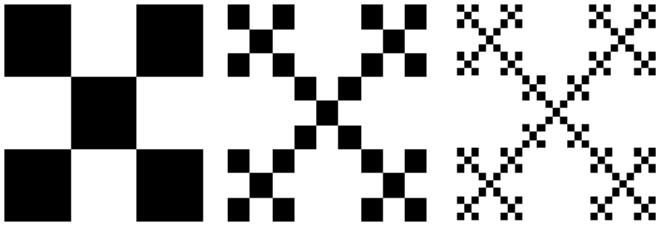
$$D=\ln 8/\ln 3=1.893$$

在正方形 9 等分后挖去四边中间的小方块，并如此无限进行下去，就得到 Vicsek 图形（图 3.4（b）），此时用尺寸为$(1/3)^n$的正方形测量，得到图形有 5^n 个单元($N=5^n$)，得到的分维

$$D=\ln 5/\ln 3=1.465$$



(a)



(b)

图 3.4 (a) Sierpinski 正方毯 (b)Vicsek 图形

3.3.4 Sierpinski-Menger 海绵

立方体 27 等分（三个方向均三等分）成 27 个小立方体，挖去 1 个体心和 6 个面心位

置上的小立方体，留下 20 个小立方体，如此无限进行下去，得到和 Sierpinski 图形密切有关的 Sierpinski-Menger 海绵（图 3.5）。利用立方体为测量单元并不断缩小其尺寸为$(1/3)^n$，可以得到图形有 20^n 个单元($N=20^n$)，类似地由下式计算出它的分形维数

$$D = \ln 20 / \ln 3 = 2.777$$

从以上的例子可以看出：规则分形的分数维（分维）是有规律的。从一直线不断挖去部分（Cantor 集），维数小于 1；从一直线不断增加成 Koch 折线，维数大于 1；从规则平面图形（三角形、正方形）不断挖去部分（Sierpinski 图形），维数小于 2，不断挖去的部分愈多，分维愈小，如 Vicsek 图形的分维小于 Sierpinski 正方毯的分维。如果在上述 Sierpinski 等边三角毯中间挖去的部分加上正四面体的三个面（三角锥面），维数将大于 2。从立方体不断挖去部分，形成 Sierpinski-Menger 海绵，维数小于 3。

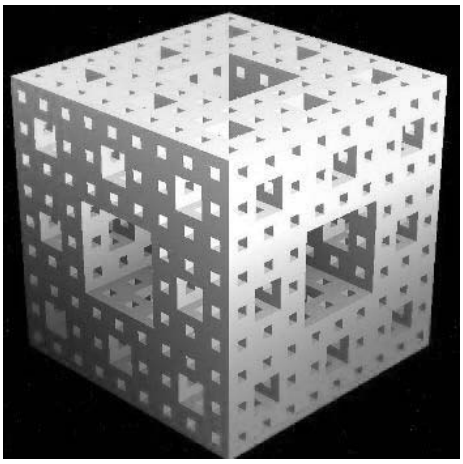


图 3.5　Sierpinski-Menger 海绵

上述规则分形符合豪斯道夫维数大于拓扑维数的定义。Cantor 集是无限多点形成的点集，其总长度趋于零，按照拓扑学的图形可以连续地变形的概念，这个集可以无限地收缩，所以它的拓扑维数为零，而它的豪斯道夫维数为 0.631；Koch 线的长度趋向无穷大，但面积为零，它可以连续地拉伸成直线，所以它的拓扑维数为 1，而它的豪斯道夫维数为 1.269；Sierpinski 平面图形线长趋于无穷大，面积趋于零，拓扑维数也是 1；Sierpinski-Menger 海绵的面积趋于无限大，体积趋于零，拓扑维数为 2。这些规则分形的分形维数均大于拓扑维数，符合强调维数的分形定义。

可以具体计算规则分形形成过程中每次操作引起的变化。例如三角形 Sierpinski 线集每操作一次，面积减为 3/4，总边长增为 3/2；Vicsek 图形每操作一次，面积减为 5/9，总边长增为 5/3；由此可见无限操作下去，两者的面积趋于无穷小，边长趋于无穷大。Cantor 点集每操作一次线段总长减为 2/3，线段数增为 2 倍，无限操作下去，长度趋于无穷小，点数趋向无穷大。Koch 折线每操作一次线段增为 4/3，线段总长和线段数趋于无穷大。

了解这些规则分形和它们的分维后，我们可以回过头来再对分形的特征进一步加以分析归纳。分形的特点是：①图形是“支离破碎的”，从数学上看它处处是奇点，如处处不连续或处处不可微。②分形具有标度不变性，即改变尺度或标度时，图形是相同的或相似的。③分形的豪斯道夫维数一般是分数（不排斥是整数），并且大于拓扑维数。这些特点在不规则分形中也是存在的，但不规则分形中的自相似性是统计意义上的自相似性，即总起来看局部和整体是相似的。

上述规则分形的自相似性、或标度不变性是无限的（测度尺度可以趋于无限小）。不管我们怎样缩小（或放大）尺度（标度）去观察图形，其组成部分和原来的图形没有区别，也就是说它具有无限的膨胀和收缩对称性。但实际观察到的分形的最小组成部分是有限的，这就是说标度的下限应大于实际分形的最小组成部分。当然，任何有限分形图形的标度的上限

应小于、等于整个图形的尺寸。

3.3.5　用放大图形的方法得到分维

以上规则分形的分维是用尺寸不断缩小的测量单位测得的，这种方法相当于下面要介绍的盒计数法。测得分维的另一种方法是：固定测量单位的尺寸为 1（很小的尺寸），不断放大图形（如放大 L 倍），测得单元数 $N(L)$，此时对于分形应该有

$$N(L) = L^D \qquad (L \to \infty) \tag{3.3.2}$$

从 $\ln N(L) \sim \ln L$ 的直线部分的斜率也可以得到分维 D。这种方法相当于下面要介绍的不断扩大测量生长范围的 Sandbox 法。

将这种方法应用到尺寸每次放大 3 倍的 Cantor 集，利用尺寸为 1 的尺子去测量，得到以下的一组数据：

L:　1，3，3^2，3^k

N:　1，2，2^2，2^k

由此得到分维

$$D = \ln N / \ln L = \ln 2 / \ln 3 = 0.631$$

应用到尺寸每次放大 2 倍的 Sierpinski 等边三角毯，利用尺寸为 1 的等边三角形去测量，得到以下的一组数据：

L:　1，2，2^2，2^n

N:　1，3，3^2，3^n

由此得到分维

$$D = \ln N / \ln L = \ln 3 / \ln 2 = 1.585$$

应用到尺寸每次放大 3 倍的 Vicsek 图形，利用尺寸为 1 的正方形去测量，得到以下的一组数据：

L:　1，3，3^2，3^n

N:　1，5，5^2，5^n

由此得到分维

$$D = \ln N / \ln L = \ln 5 / \ln 3 = 1.465$$

两种测量方法得到的结果是一致的。

3.3.6　用自相似延伸的方法得到分形

除了从规则图形中以相似的方法挖去部分得到分形之外，还可以用自相似延伸的方法得到分形。图 3.6 就是用这种方法得到的 Vicsek 图形。先是沿小正方形的四个顶角方向生长出四个同样的小正方形。再在五个小正方形的四个顶角方向生长出四个同样的图形，得到 25 个小正方形组成的图形。再次在四个顶角方向生长出四个同样的图形，得到 125 个小正方形组成的图形。将此过程不断进行下去，就得到的 Vicsek 图形[5]。

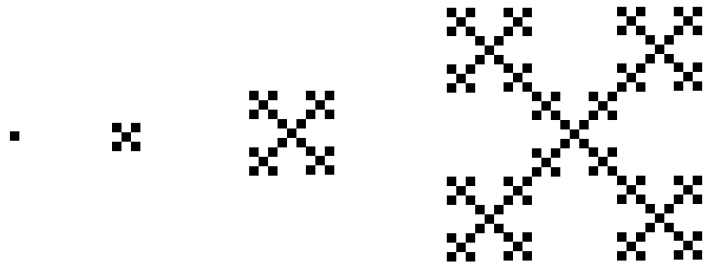


图 3.6　用自相似延伸的方法得到 Vicsek 图形

3.4 不规则分形

3.4.1 布朗运动轨迹

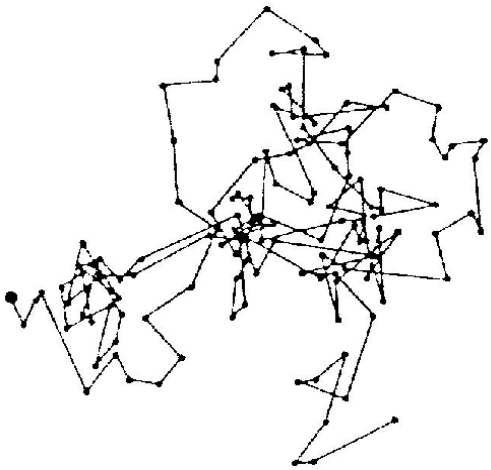


图 3.7 布朗运动轨迹

图 3.7 是 1916 年 Perrin 测得的布朗运动轨迹，每 30 秒测定一次位置，相继的二点连成直线。他还将时间间隔缩短为 3 秒，则较长的一段直线被若干折线代替。如果把后者适当放大，可以看到它的曲折程度和前者相同，即二者具有统计的自相似性。

如果图 3.7 中每一线段由位移矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 表示，布朗运动的总位移 $\boldsymbol{R}$ 可表示为

$$\boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{r}_i \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{3.4.1}$$

总位移的均方根 R 的平方

$$R^2=<\boldsymbol{R}^2>=\sum<\boldsymbol{r}_i^2>+\sum \boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j \qquad (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{3.4.2}$$

这里< >表示多次数据的平均。由布朗运动的随机性得出，上式中的第二项为零，令 b^2 代替第一项中的位移均方值 $<\boldsymbol{r}_i^2>$，得到：

$$R^2=Nb^2 \quad 或 \quad N=(R/b)^2 \tag{3.4.3}$$

这是一个步数 N 和无量纲约化总位移(R/b)之间的关系式，类似于(3.3.2)式，N 相当于图形包含的单元数即线段数，R/b 相当于图形尺寸放大的倍数，作 $\ln N\sim\ln(R/b)$ 曲线，得到的斜率为 2，因此布朗运动的分维为 2。以上推导适合于一维、二维、三维以至高维空间，也就是说，在任何维空间中随机行走的分维都是 2。从这个例子还可以看到，分维不排斥是整数。在一维情形下，由计算机随机数发生器给出在 0 和 1 之间均匀分布的随机数，可以规定随机数在 0 和 0.5 之间使运动粒子向上走一步，随机数在 0.5 和 1 之间时它向下走一步。显然，随着很大的总步数 N 的增大，被访问的一维格点数 N' 也增大，统计结果得出：

$$N'\propto N^{1/2} \tag{3.4.4}$$

N' 比 N 小得多，这是因为愈是离原点近的格点，被访问的次数愈多，而且不同格点被访问的概率符合正态分布（高斯分布），而原点位置是被访问概率最大的点。

在二维情形下，在(i，j)格点上的运动粒子可以向 4 个最近邻(i–1，j)、(i+1，j)、(i，j–1)、(i，j+1)随机运动，同样地由平均分配的随机数区间控制布朗轨迹的运动方向。当总步数 N 很大时，得到的访问点分布图形的回转半径 R_g 为

$$R_g\propto N^{1/2} \tag{3.4.5}$$

即回转半径和总步数平方根成正比。这个结果和非等步长布朗运动的结果是一致的。二维情形下被访问的格点数 N' 为

$$N' \propto N / \log N \tag{3.4.6}$$

N' 比 N 也小不少，这是因为二维布朗运动也可以对离原点较近的格点访问多次，但其概率比一维情形下访问的概率要小得多。

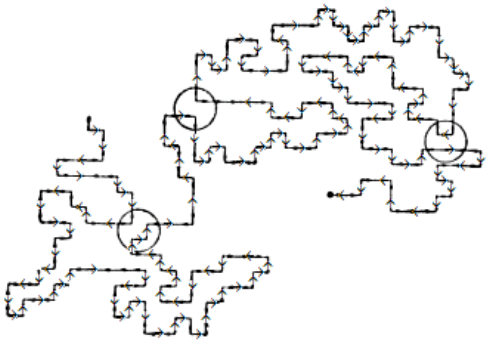
在三维到高维情形下，运动粒子有充分多的方向上的格点去访问，重复访问的概率实际上将降到 0，所以访问格点数实际上等于总步数，即

$$N' \propto N \tag{3.4.7}$$

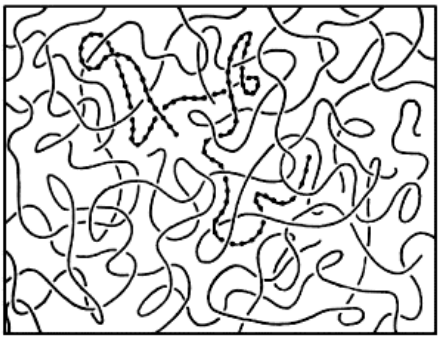
从上述的讨论中可以看出，布朗轨迹的分维数与它所处的欧几里德空间维数 d 是无关的，因此这个分维数 D 是一个普适常数。但是重复访问概率数 N' 在不同空间维数时与总步数 N 存在着不同的关系。这实质上反映布朗轨迹的几何结构是与它所处的空间维数 d 有着密切的关系。

3.4.2 自回避随机行走

这是一个能模拟无规高分子线团的计算机模型，和随机行走（布朗运动）的差别是这个模型不允许一个格点被重复访问，因为高分子链的分子位置不允许另一个分子去占有。图 3.8（a）是二维情形自回避随机行走的最初若干步的示意图[6]。在计算机模拟中仍由均匀分配的随机数区间决定运动方向（在高分子中决定连接上去的分子的方向），但是当它要走向已被占据的格点时放弃这一步（图中圆圈表示的位置），再由新的随机数决定另一个方向。图 3.8（b）表示这个模型可以用来模拟无规的高分子链。



(a)



(b)

图 3.8 (a)二维自回避随机行走示意图

(b)可以用于模拟高分子链的无规走向[6]

在一维情形下，自回避随机行走无法进行，高分子只能沿它的轴不断生长下去。二维、三维以至高维情形下，理论分析得出回转半径 R_g 为

$$R_g \propto N^{1/D} \tag{3.4.8}$$

这里的 D 是分形维数，并且它与空间维数 d 有以下关系

$$D = (d+2)/3 \tag{3.4.9}$$

一维时 D=1，二维时 D=4/3（曲折程度远低于 D=2 的随机行走），三维时 D=5/3（计算机模拟结果 D=1.70），四维时 D=2，得到了与随机行走相同的维数结果。在实际情况中，在良溶剂条件下的高分子线团是存在于三维空间内，它是一个具有自相似结构的分形体，其相应的分数维数是 5/3。而在四维空间中得到的模拟结果正好与我们在上节中讨论的结果相一致，也就是说在三维以上空间，$N' \propto N$，即重复访问的概率趋近于零，D=2。由此可见，自回避行走模型的上限维数是 d=3，因为空间自由度数的增加使自回避的限制条件在四维以上的空间不再起作用了。

Madras 和 Sokal[7]用 Monte Carlo 方法给出一个高效率的自回避随机行走的算法，可以计算得到很大的图形。

3.4.3 二维聚集和生长得到的图形

图 3.9 是著名的扩散限制聚集（DLA）模型[8]给出的二维随机生长图形，计算这一类图形分维的方法将在下面具体介绍。DLA 过程简单介绍如下。先在二维正方格子的中心放上一个粒子作为核心，再在远处随机产生一个粒子并让它作随机的扩散运动，一旦它进到核心的最近邻位置就停下成为两个粒子组成的核心。此后在远处不断产生新的粒子重复上述过程，直到成千上万个粒子聚集成图 3.9 那样的图形（图中包含 20000 个在无点阵衬底上扩散聚集的粒子）。后面将要仔细介绍这一著名模型以及它的实验验证（用超高真空扫描隧道显微镜得到的金属超薄膜生长图形）。

图 3.9　DLA 生长图形

除了计算机模拟得到的分形之外，实验也得到许多分形图形。图 3.10 是 Au/a-Ge（a-Ge：非晶 Ge）双层膜在 100°C 退火 70min 后出现的分形晶化的透射电子显微镜照片[9,10]，这是一种不规则分形。不同厚度比 Al/a-Ge 双层膜在不同温度下退火后出现的分形晶化的系列透射电镜照片见文献[11]。

图 3.10　Au/a-Ge 膜在 100°C 退火 70min 后
出现的分形晶化的透射电子显微镜照片[9]

3.5　不规则分形维数的测定

不规则分形只具有统计意义下的自相似性。不规则分形种类繁多，它可以是离散的点集、粗糙曲线、多枝杈的二维图形、粗糙曲面、以至三维的点集和多枝杈的三维图形。目前测定不规则分形维数的方法很多，这里介绍一些常用的测定方法。

3.5.1　粗糙曲线的圆规维数

图 3.11 是一段粗糙曲线（例如曲折的海岸线）。Mandelbrot 在 1982 年出版的《自然界的分形几何》专著[1]中曾描述过可用不同的码尺来测量海岸线的长度。如图 3.11 所示，用半径尺寸为 l 的圆规从上端开始作圆弧和海岸线相交，其交点为下一个圆弧的中心，图上画出了四个相继的圆弧（圆心用粗黑点表示）和曲线相交后的各段长为 l 的折线。这样得到海岸线的总长度为 N（用长度为 l 的尺去丈量，得到 N），减小尺寸为ε（ε<1）后丈量，得到更大的 $N(\varepsilon)$，ε越小、N 越大。如果作 $\ln N \sim \ln \varepsilon$ 图后得到斜率为负的直线，这表明存在如下的幂函数关系：

$$N \sim \varepsilon^{-D} \tag{3.5.1}$$

这里的 D 就是海岸线的分维（1 和 2 之间），海岸线越曲折，D 比 1 大得越多(假如海岸线是直线，得到的 D=1)。这样测定的分维被称为圆规维数。

图 3.11　粗糙曲线的圆规维数

这个方法和 Koch 曲线分维的测量方法是一致的。两者都用尺寸不断缩小的尺子沿着曲线进行测量。不同的是，测量 Koch 曲线的分维时，测量尺子的长度等于 Koch 曲线中的小线段长度或它的 3^n 倍（n: 整数）。

上式也就是 Mandelbrot 在《分形：形状、机遇和维数》专著[2]中引用的 Richardson 公式。Richardson 是根据挪威、澳大利亚、南非、德国、不列颠西部、葡萄牙的海岸线丈量结果得出此公式的，使用的测量长度的单位一般在 1 公里到 4 公里之间。海岸线绝对长度 L 被表示为：

$$L = N\varepsilon \sim \varepsilon^{1-D} \tag{3.5.2}$$

他得到挪威东南部海岸线的分维 D=1.52，而不列颠西部海岸线的分维 D≈1.3。这说明挪威的海岸线要比英国的海岸线更曲折一些。

3.5.2 从周长-面积关系或表面积-体积关系求分维[12~14]

如果粗糙曲线都是封闭的，例如海洋中的许多小岛，就可以利用周长-面积关系求分维，因此这个方法又被称为小岛法。

规则图形（如圆、正方形等）的周长 P 与测量单位尺寸ε 的一次方成正比，而面积 A 则与ε 的二次方成正比。通常我们可以把它们写成一个简单的比例关系，

$$P \propto A^{1/2} \tag{3.5.3}$$

对于在二维空间内的不规则分形的周长和面积的关系显然要复杂一些，Mandelbrot 提出，应该用分形周长曲线来代替原来的光滑周长，从而给出了下述关系式-

$$[P(\varepsilon)]^{1/D} = a_0\varepsilon^{(1-D)/D}[A(\varepsilon)]^{1/2} = a_0\varepsilon^{1/D}\varepsilon^{-1}[A(\varepsilon)]^{1/2} \tag{3.5.4}$$

这里的分维 D 大于 1（周长光滑时 D=1，上式转化为（3.5.3）式），使 P 的变化减缓，a_0 是和岛的形状有关的常数，ε 是测量尺寸，一般取ε 为小于 1 的数值（如取岛的最大直径为 1），使因子 $\varepsilon^{(1-D)/D}$ 随测量尺寸ε 减小而增大。当粗糙曲线趋于光滑曲线 时，D 趋于 1，即得到原有的规则图形的关系。上式关系取对数后得到：

$$\frac{\log[P(\varepsilon)/\varepsilon]}{D} = \log(a_0) + \log\left[\frac{A(\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon}\right] \tag{3.5.5}$$

测得数据后，作 $\log[P(\varepsilon)/\varepsilon] \sim \log[A(\varepsilon)^{1/2}/\varepsilon]$ 图，从其中直线部分的斜率的倒数，可以得到分维 D。

这个方法可以推广到粗糙曲面（表面积-体积法）。众所周知，三维规则图形（球、立方体）的面积 A 和体积 V 之间有以下 关系：

$$A^{1/2} \propto V^{1/3} \tag{3.5.6}$$

对粗糙曲面，推广上述关系为

$$[A(\varepsilon)]^{1/D} = a_0\varepsilon^{(2-D)/D}V(\varepsilon)^{1/3} \tag{3.5.7}$$

这里 a_0 是常数，粗糙曲面趋于光滑曲面时，D 趋于 2，即得到原有的三维规则图形的关系。上式取对数后得到：

$$\frac{\log\left[A(\varepsilon)/\varepsilon^2\right]}{D} = \log(a_0) + \log[V(\varepsilon)^{1/3}/\varepsilon] \tag{3.5.8}$$

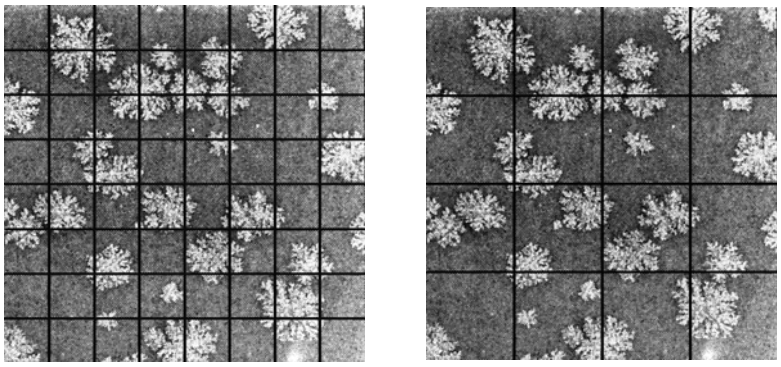
测得数据后，作 $\log[A(\varepsilon)/\varepsilon^2] \sim \log[V(\varepsilon)^{1/3}/\varepsilon]$ 图，从其中直线部分的斜率的倒数，可以得到分维 D。

小岛法是 Mandelbrot 首先提出的，它在金属断口分析中得到应用。测量前先在断裂面上镀一定厚度的镍，再用金相抛光方法在等高截面上得到一系列岛状图形，利用显微镜或扫描电子显微镜将每个岛的面积和周长测量出来。如在计算机中用适当大小的网格去覆盖一个岛，岛边缘的象素的最近邻数小于 4，令它们为黑色，由此得到周长。岛内象素的最近邻数

为 4，令他们为白色，由此得到面积。随后改变网格大小ε 得出一系列数据，作$\log[P(\varepsilon)/\varepsilon] \sim \log[A(\varepsilon)^{1/2}/\varepsilon]$图得到 D 值。也可以固定ε 测量许多大小不等的岛的面积和周长后得到 D 值。

龙期威等用小岛法对金属断口进行了深入的研究，肯定了它的优点，指明了它的缺点。他在《金属中的分形与复杂性》[14]中指出：利用小岛的周长-最大直径关系求分维更好一些。为了全面地研究金属断口，还可以用金相抛光方法在上述样品中得到不同方位的纵截面，再测出纵截面上粗糙轮廓曲线的分维。

3.5.3 盒计数法



(a) (b)

图 3.12 盒计数法计算分维

这种方法的示意图见图 3.12。将尺寸分别为ε =1/4 和 1/8 的网格覆盖在分形图形上，计数网格中有图形象素（不管有许多象素还是很少象素）的方格数目，例如得到 $N(1/4)=16$ 和 $N(1/8)=60$ （增大不到 4 倍）。不断减小网格尺寸ε 继续计数含图形象素的网格数 $N(\varepsilon)$，直至最小的网格尺寸达到象素为止。为了减少误差，应该使不同尺寸的网格能覆盖相同大小的图形，如 512×512 象素的图形的ε 应当是 1，1/2，1/4，1/8，1/16…，直到降到 1/512，而 360×360 象素的图形的ε 应当是 1，1/2，1/3，1/4，1/5，1/6，1/8…直到降到 1/360。将一系列 $N(\varepsilon)$、ε 数据作$\ln N(\varepsilon) \sim \ln(1/\varepsilon)$图，如能得到一条直线，它说明 $N(\varepsilon)$和ε 有如下关系：

$$N(\varepsilon) \sim (1/\varepsilon)^D \tag{3.5.9}$$

即直线的斜率 D 是图形的分维。如果$\ln N(\varepsilon) \sim \ln(1/\varepsilon)$图上只有一部分是直线时，则此图形的自相似性（标度不变性）只存在于直线部分的测度范围内。实际的分形和理想的规则分形不同，它只存在于有限的范围之内。

如果图形是规则的实心图形，则用上述方法在ε远远小于图形最大尺寸的范围内有$N \sim (1/\varepsilon)^2$的关系（网格尺寸缩小一倍，N 增至 4 倍）。但上述分形由于有很多缺损部分，网格尺寸缩小一倍，N 增大不到 4 倍，因此分形图形的上述双对数图中直线斜率不那么陡，即分维 $D<2$。盒计数法也适用于一维和三维的不规则分形。对一维空间中的分形（如 Cantor 集），用等分的直线段测量；对三维空间中的分形，我们用等分成小立方体的网格进行测量。

3.5.4 Sandbox 法

Sandbox 法（图 3.13）是将一系列尺寸 r（>1）不断增大的方框（也可以是圆）覆盖到分形图形（如 DLA 图形）上，计数不同方框（或圆）中象素数 N（即以象素为测量单元），

在 $\ln N \sim \ln r$ 图上如有直线部分，则在此范围内存在：$N \sim r^D$，直线部分的斜率即分形维数 D。Sandbox 法也可以应用于一维和三维空间或更高维空间中的分形。

有文献报道，如果将方框（或圆）内图形的质心和方框中心（或圆心）重合，得到的 $\ln N$ 和 $\ln r$ 关系的相关性更好。但是这要增加许多计算工作量，因此一般将方框中心（或圆心）固定，如将生长中心选为方框中心。

显然，上述方框（或圆）的最大尺寸应适当小于图形的最大尺寸，因为当方框接近图形最大尺寸时，计数得到的 N 值逐渐趋向饱和（达到图形的最大尺寸后，N 不再变化）。最大方框（或圆）的尺寸可以限于回转半径之内。回转半径的计算方法见下面的面积-回转半径法。

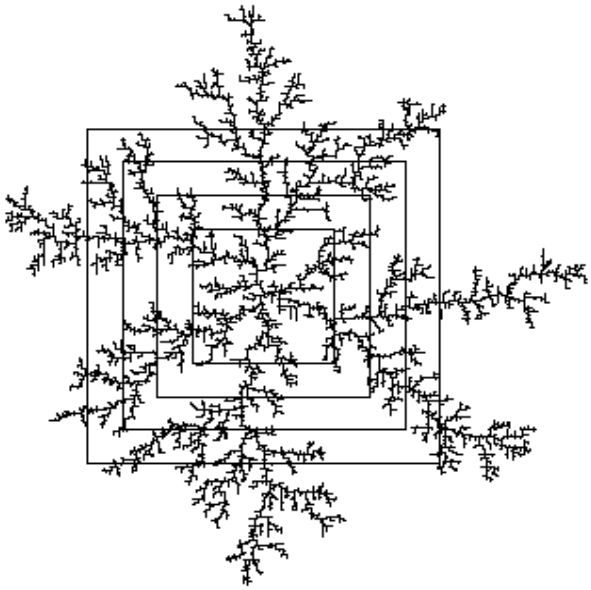


图 3.13　Sandbox 法计算分维

Sandbox 法适用于单个分形图形，如 DLA 模型生长得到的图形。在计算机模拟 DLA 生长过程中可以随时测定生长过程中图形的分维，以判别图形生长过程中分维是否发生变化。

3.5.5　面积-回转半径法

对含有许多个团簇的图形（如图 3.12），除了用上述盒计数法计算整个图形的分维之外，也可用面积-回转半径法计算分维，这样的计算还可以具体地指明图中大小不等的各团簇的分布并给出直方图。

此法利用通常的图像处理软件把各个分形（团簇）的面积 N 和回转半径 R_g 一一计算出来，作 $\ln N \sim \ln R_g$ 图，如有直线部分，此部分的斜率就是分维 D，即此时存在

$$N \sim R_g^D \tag{3.5.10}$$

的关系。显然，D 小于 2，因为图形中包含了许多空隙。

图 3.14 是用面积-回转半径法求分维的一个实例[14]，首先对 Pd-Si 合金薄膜透射电子显微镜照片中的许多分形进行二值化处理，再得到每一个分形的面积和回转半径。图中 N 是各个分形图形的面积，R_g 是它们的回转半径。从双对数图可以看出，实验数据的线性很好，从直线的斜率得到 $D = 1.76$。

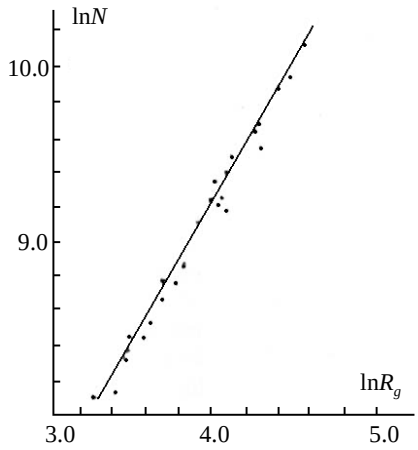


图 3.14　面积-回转半径法求分维[14]

在已知分形中心或质心时，回转半径 R_g 的定义是

$$R_g^2 = \frac{\sum r_i^2}{N} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ N) \tag{3.5.11}$$

这里的 r_i 是象素 i 至分形中心的距离，i 遍及所有象素（从 1 到 N）。

另一个等价的式子是：

$$R_g^2 = \frac{\sum (r_i - r_j)^2}{2N(N-1)} \qquad (i,\ \ j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ N) \tag{3.5.12}$$

即任选分形中的两点的位置得到两者之间的距离后，由上式求回转半径。式中 i 和 j 遍及所有象素，分母中的 2 是因为式中 i 和 j 粒子的距离的平方被重复计算了两次，需要除以 2 作为修正，N 很大时上式的分母（粒子间距离的数目）可以用 $2N^2$ 代替。

这一方法和 Sandbox 方法是一致的，即它把所有分形看成大大小小先后生成的图形，而 Sandbox 方法把一个分形生长到不同阶段得到的图形进行分维计算。对包含许多团簇的图形用本方法能得到更准确一些的分维（比从中选出几个典型的分形计算的分维值更准确）。用此方法计算分维时应把不完整的分形（被边截去部分的分形）舍去，用图像处理系统把包含完整分形的总面积求出来后，可以得到单位面积内的分形数。

此方法适用于三维空间中包含大大小小许多分形体的维数的测量。此时把各个分形体的体积（或象素点的总数）N 和回转半径 R_g 一一计算出来，作 $\ln N \sim \ln R_g$ 图，如有直线部分，此部分的斜率就是分维 D，其数值小于 3。

3.5.6　变换（Variation）法

这是 Dubuc 等[16]介绍的方法，对已知维数分形曲线运用此法得到的结果比盒计数法准确。后来 Spanos 和 Irene[17]把此方法推广应用于粗糙曲面，也得到很好的结果。

此法设置宽为 R 的矩形（盒子）覆盖到分形曲线上，矩形的高度由分形曲线在框内的最高点和最低点决定（图 3.15），图上画出一个宽 R_1 的矩形和另一个宽 R_2 的矩形，由于后者宽度大，使矩形高度增大。一步一步移动矩形遍及所有象素点，将所有矩形的高和宽相乘并且加起来得到总面积 $S(R)$。系列地改变 R 的大小后重复以上操作，得到一系列 $S(R)$。上述操作过程中矩形经过的范围应远远大于矩形的宽度。将 $S(R)$ 除以 R^2 得到

$N(R)=S(R)/R^2$，作 $\ln N(R)\sim\ln(1/R)$ 曲线，取其中线性部分的斜率为分维 D，因为在线性范围内存在 $N(R)\sim R^{-D}$ 的关系。这里的 $N(R)$ 实际上就是覆盖一部分粗糙曲线所需的面积为 R^2 的盒子数，不过它一般不是整数。R 愈大，$N(R)$ 愈小。也可以直接作 $\ln S(R)\sim\ln R$ 曲线，其中线性部分的斜率为 2–D，并由此斜率得到分维 D。

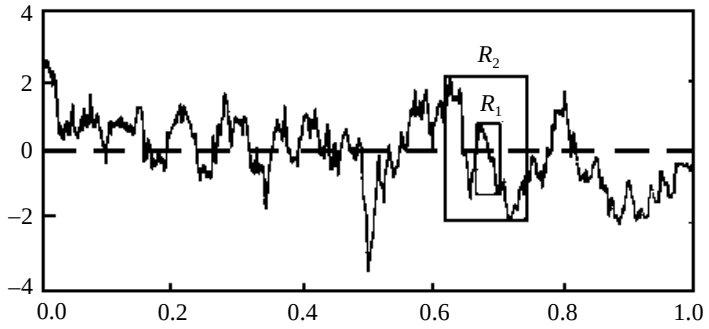


图 3.15　变换（Variation）法求分维

变换法可以推广到粗糙曲面的分维计算[17]。此时测量用的矩形被正方柱代替，正方柱的底面取为 1×1，3×3，5×5，7×7，… $R\times R$，一步一步移动正方柱遍及所有象素点，正方柱的高度由正方柱范围内粗糙曲面的最高点和最低点之差决定，将所有正方柱的体积加起来得到总体积 $\Omega(R)$。逐步改变 R 的大小后重复以上操作，得到一系列 $\Omega(R)$。上述操作过程中柱体经过的范围应远远大于 R^2。$\Omega(R)$ 除以 R^3 得到 $N(R)=\Omega(R)/R^3$，这里的 $N(R)$ 实际上就是覆盖一部分粗糙曲面所需的体积为 R^3 的盒子数。作 $\ln N(R)\sim\ln(1/R)$ 曲线，其中线性部分的斜率为分维 D。和粗糙曲线的情形类似，也可以直接作 $\ln\Omega(R)\sim\ln R$ 曲线，其中线性部分的斜率为 $3-D$，并由此斜率得到粗糙曲面的分维 D。变换法和盒计数法在本质上是相同的，它们都是用不断改变尺寸的盒子去覆盖图形。盒宽变换法比较准确的原因可能是：①它允许二维或三维的盒子数 $N(R)$ 可以是非整数，② $N(R)$ 是遍及所有象素点得到的数值。

3.5.7　密度-密度相关函数法

平面上分形图形的密度-密度相关函数 $C(r)$ 的定义为

$$C(r)\equiv\left\langle\sum\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r})}{N}\right\rangle\sim r^{-A} \tag{3.5.13}$$

在二值化图形中，这里的 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 是图形的密度函数，有图形象素处为 1，无图形处为 0；N 是总象素数；$\boldsymbol{r}$ 是图形相对原始位置的平移矢量；< >是平均符号，它除了对 N 个不同的 $\boldsymbol{r}'$ 求平均之外，还对不同方向、长度相同的 $\boldsymbol{r}$ 求平均。密度-密度相关函数的几何意义是原始图形和平移后的图形重叠部分的象素数和全部象素数的比值，即在相距 $\boldsymbol{r}$ 处发现另一象素的概率，显然不规则分形不同方向平移同样长度后的重叠象素数不同，因此需要求平均。在一般的正方点阵象素组成的图形中，先按最近邻（$r=1$）4 个方向求平均，再按次近邻（$r=\sqrt{2}$）4 个方向求平均，以后类似地逐步增加 r 并按更多方向求平均。得到的不规则分形的 $C(r)$ 只和位移矢量的大小有关，它表示在相距 r 处发现另一象素的概率。显然，对于有限的图形，$C(r)$ 随 r 的增大而减小。

作为一个特例，可以在$C(r)$中把$\boldsymbol{r}'$固定下来并把它取为图形的中心（即取$\boldsymbol{r}'=0$），此时的密度-密度相关函数为：

$$C(r)=<\rho(0)\rho(\boldsymbol{r})> \tag{3.5.14}$$

它表示重心为圆心、r为半径的圆周的各点上发现另一图形象素的概率。由于分形具有自相似性，可以将$C(r)$表示为幂函数（见下一节）：

$$C(r)\sim r^{-\alpha} \tag{3.5.15}$$

如果把固定中心后的$C(r)$在回转半径R内积分，在R足够大时，积分值很接近于和图形总象素数N成正比，即

$$\int_0^R C(r)d^d r \propto N \tag{3.5.16}$$

这里的上标d是欧氏空间维数。于是得到

$$N\propto R^{d-\alpha} \tag{3.5.17}$$

此时分维D为

$$D=d-\alpha \tag{3.5.18}$$

由此可见，密度-密度相关函数法求D时先作$\ln[C(r)]\sim\ln r$图，从直线部分的斜率中得到α值，再根据上式求出分维D。

图 3.16 是用密度-密度相关函数法求分维的一个实例[15]，首先将 Pd-Si 合金薄膜中出现的各个分形图形（类似图 3.12）按不同的r经过多次平均得到各个分形图形的$C(r)$。从各个双对数图中的直线部分得到平均斜率$\alpha=-0.22$，再从上式得到$d=2$时（二维图形）$D=1.78$。这个值和面积-回转半径法得到的$D=1.76$（图 3.14）一致。

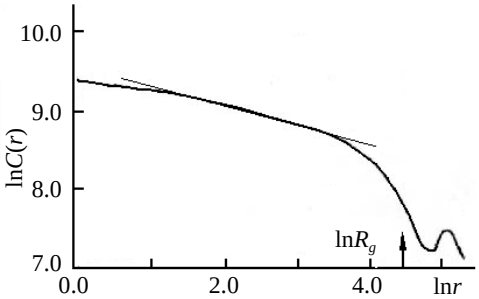


图 3.16　密度-密度相关函数法求分维(图中的R_g是回转半径)[15]

密度-密度相关函数法和 Sandbox 法、面积-回转半径是一致的。我们的测量结果得出，不同方法得到的D的误差约为 0.02。但密度-密度相关函数法计算量很大，因为需要考虑所有象素并多次在不同的方向上求平均。

以上所介绍的各种测量不规则分形的分维的方法，在原理上都是利用了它们的自相似性和被测量是随测量尺度的改变而改变的特性。因此选择哪一种方法来测定和计算分维只能从实际问题出发，没有统一的标准。但在计算分维时存在的共同点是在计算时原则上要求图形象素数尽量多和相似的层次尽量多。实际上上述各个方法的一致性也都建立在分形中相似层次很多、象素数很大的基础之上。但实验图形往往达不到这样的要求，例如，晶化分形的上述双对数图上的线性范围只有一个量级。计算机模拟结果原则上可以有大得多的线性范围，但限于计算机时，一般双对数图上的线性范围是 2~3 个量级。因此我们在实际的研究工作中，对研究对象使用分形或分维等概念时一定要注意它的适用范围。要具体的指明在什么尺度下研究的对象是一个分形，而在其它尺度时，它不具备分形的特性。

3.6 标度不变性

自相似性或标度不变性在数学上可表示为：

$$f(\lambda r)=\lambda^m f(r) \tag{3.6.1}$$

即把 r 扩大为 λr 后，新的函数增大为原函数的 λ^m 倍（λ 和 m 都是常数），即标度改变了 λ 倍后函数具有自相似性（新函数是膨胀的或收缩的原函数）或标度不变性。说得严格一点，此时函数具有标度变换下的不变性。λ^m 这就是所谓的标度因子。满足这一性质的简单函数是幂函数

$$f(r)\sim r^m \tag{3.6.2}$$

由此可得：

$$f(\lambda r)\sim(\lambda r)^m=\lambda^m r^m=\lambda^m f(r) \tag{3.6.3}$$

对于规则分形，标度扩大的倍数 λ 取间断的值。

其他形式的函数，如指数函数、高斯函数等，就不具有这种标度不变性。改变它们的标度后新函数和原先的函数没有简单的正比关系。这些函数包含有一个特征长度，在此范围内它们衰减很快。幂函数没有这种特征长度，它不仅衰减慢，而且在不同层次（如上一个数量级和下一个数量级）以同样的比例衰减。这就是说它具有标度不变性、或标度变换下的不变性。

显然，幂函数的标度不变性可以扩展到无限多个数量级，取间断值的规则分形的测度变化也是无限的。但是实验得到的不规则分形的标度不变性常常是很有限的，如 Avnir 等在 Science 上的文章[18]指出，根据 1990~1996 七年间在 Phys. Rev. A 到 E 和 Phys. Rev. Lett.上发表的 90 多篇实验分形论文结果的统计（图 3.17）[18,19]，幂函数适用的范围（即 $\ln N\sim\ln(1/\varepsilon)$ 曲线的线性范围）集中围绕在 1.3 个数量级上下（绝大多处于 0.5~2.0 个数量级）。这里的原因是：标度不变性的上限受到整个图形尺寸的限制，标度不变性的下限受到图形最小象素的限制（如作为象素的原子、分子、分形图形的枝杈宽度等）。

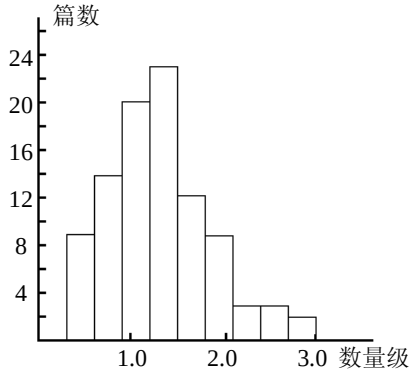


图 3.17　实验分形标度不变范围的论文篇数统计[18,19]

3.7　林氏系统绘制分形图形

林氏系统（通常称 L 系统）是 Lindenmayer[20]1968 年为模拟生物形态而设计的，后来 Smith[21]于 1984 年、Prusinkiewicz[22]于 1986 年分别将它应用于计算机图形学，引起生物界和计算机界人士极大兴趣，发表了许多论文和专著[23,24]。

L 系统实际上是利用字符串替换算法进行的字符串重写系统，它是一种简单明快地用计算机绘制分形图形的方法，但却能绘制出相当复杂优美的图形，这种方法的理论根据也是相当简单的，主要是利用分形可以由图(生成元)迭代产生这一基本原理，因此可以用字符串表示生成元的构成(如组成线段数、转动角度等)，再把字符串反复迭代就能生成所希望得到的分形图。所以这种方法主要能用在生成元比较明确的那些分形上。它可分为两大类，一类是比较规则的经典分形图形如 Koch 曲线、Peano 曲线、Hilbert 曲线、Sierpinski 三角、正方地毯等；另一类是比较复杂的如具有分枝结构的枝状的分形树。

L 系统由三部分（*V*，*ω*，*P*）组成。*V* 是各种符号，用来表示所要模拟事物的最基本结构，如 *F* 表示从当前位置向前走一步，同时画线，−表示从当前方向向右转一个给定的角度。*ω*是被称为“公理”的符号串。*P* 是生成规则（或替换规则）。按一定的生成规则多次作用，最后产生一个较长的命令串，用它来生成图形。作用一次称为一级(order)，一般来说选择的级数不宜太高，通常选 2~8 级，最多 15 级。

为编写程序的方便，可以用“伪码”表示各种 *L* 系统的生成过程，伪码虽然不能直接运行，但解释程序可以直接读取这种 ASCII 文件，然后进行绘图，这样做可以很容易地更改规则，没有很强的编程能力也完全可以进行。符号串的图形学解释有多种，一般由编程者的意愿而定，这里我们沿用网络上下载的 Fractint 19.5 中的 *L* 系统约定的伪码，相应的解释见表 3.1（表中只列出了部分）。某一确定的 *L* 系统有三个最基本的方面，即角度增量、公理和代换规则。在实际的编程中还要视作图需要约定一些初始量如起始点坐标、起始角、步长、迭代上限次数等。下面将举一些具体的例子加以说明，这里用 n 表示角度增量为 $360^{\circ}/n$，每行的“；”之后是程序注释，不参与编译，每个程序均以程序名开始，以{}括起来的是程序体。

表 3.1　*L* 系统的部分符号规定及解释

符号	图形解释
F	从当前位置向前走一步，同时画线
G	从当前位置向前走一步，但不画线
+	从当前方向向左转一个给定的角度
−	从当前方向向右转一个给定的角度
|	原地转 180°
[	将当前状态压进栈（当前状态存储起来）
]	将图形状态重置为栈顶的状态，并去掉该栈中的内容

例 1：生成 Koch 曲线，初始图形是一线段，生成过程是将线段中间 1/3 向外折起，程序伪码如下：

```
KochCurve{          ；  Koch 曲线
Angle 6             ；角度增量是 60°
Axiom F             ；初始图形是一单位线段
F=F+F- -F+F         ；替换规则是将每一线段分成四段，中间两段与原线段呈正三角形
}                   ；结束
```

L 系统的代入过程可以通过符号串替换表示，具体来说在上例中就是将 *F* 不断用 *F+F--F+F* 代换。

第一次代换得：

F+F--F+F

第二次代换得：

F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F

第三次代换得：

F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F

第四次代换得：

F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F-

-F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+
F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F
+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F
+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F
+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F-
- F + F + F + F - - F + F + F + F - - F + F + F + F - - F + F - - F + F - - F + F + F + F - - F + F

可见，符号串的增长速度很快，有了这样的符号串后就可以按照每个符号的图形解释进行作图了。图 3.18 是 Koch 曲线的生成过程。

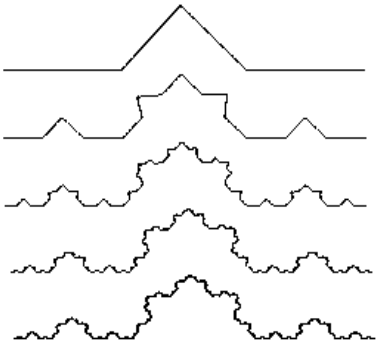


图 3.18　Koch 曲线的生成过程

例 2：生成 Sierpinski 三角毯，图 3.19 是迭代 6 次后的图形，Sierpinski 三角毯的伪码如下：

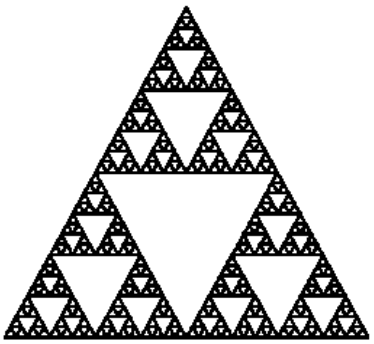


图 3.19　Sierpinski 三角毯

Sierpin{　　；Sierpinski 三角毯
Angle 6　　；角度增量是 60°
Axiom *FXF-FF-FF*　　；初始图形是一个三角形，*X* 是替换中的中间变量，在作图形解释时跳过它，不做任何操作
F=FF　　；替换规则 1 是将每一线段分为两段
X=--FXF++FXF++FXF--　　；替换规则 2 是将中间变量 *X* 变成一个三角形
}　　；结束

例 3：Hilbert 曲线，迭代 6 次后生成的图形如图 3.19 所示，相应的伪码如下：

Hilbert{　　；Hilbert 曲线
Angle 4　　；角度增量 90°
Axiom *X*　　；公理
X=-YF+XFX+FY-　　；代换规则 1 是将中间变量 *X* 变成一个向下的⊓字形
Y=+XF-YFY-FX+　　；代换规则 2 是将中间变量 *Y* 变成一个向上的⊔字形
}

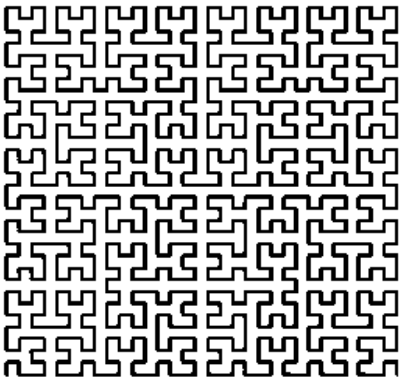


图 3.19　Hilbert 曲线

L 系统还被广泛用于模拟各种植物形态。植物的生长过程可简化为一种分枝结构：一个茎秆破土而出，茎秆向四周长出一些小枝，小枝上又长出更小的细枝，如此进行下去。这种分枝结构可以用 *L* 系统的迭代重写过程来实现。尽管这种模拟没有考虑茎、叶、花、果实等的差别，但这个模型仍然对大多数植物的形态，尤其是它们在视角上的效果具有指导性。图 3.20 中画出了几个典型的由 *L* 系统模拟得到的植物形态图。它们的角度增量、公理、迭代规则列在表 3.2 中。

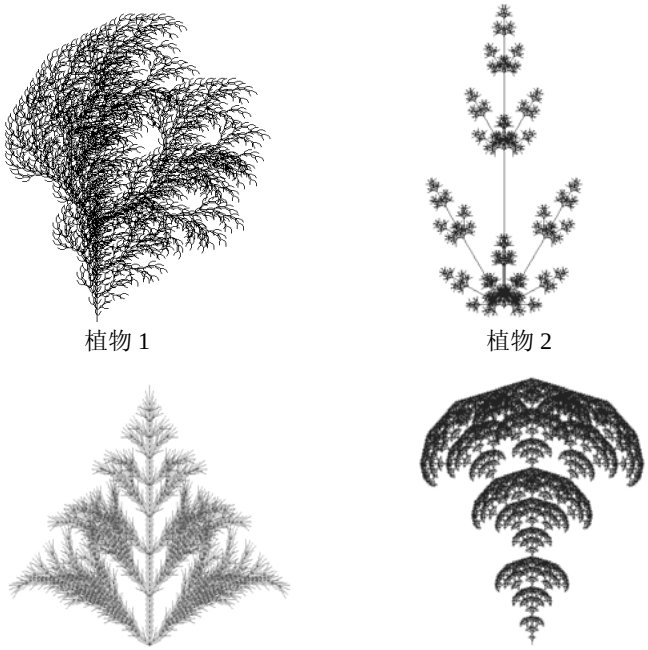


图 3.20　几个典型的由 *L* 系统模拟得到的植物形态图

最近，有作者[6]在原先的 *L* 系统中又加进了随机因子，可使得模拟出的植物形态更为逼真。

3.8　迭代函数系统绘制分形图形

迭代函数系统 IFS（Iterated Function Systems）的理论和方法是分形自然景观模拟和分形图形压缩的理论基础。Barnsley 和 Demko[26-27]的工作使 IFS 方法成为构造任意维数分形集的方便、有效的方法，并将之应用到图像的压缩和处理方面，引起了人们极大的关注。IFS 方法的魅力在于它能否解决由图形到 IFS 的“逆问题”，根据拼接定理（collage theorem），

对于一个给定的图形（比如一幅照片），如能求得几个生成规则，就可以大幅度压缩信息，因为生成规则比图形信息量少得多。

迭代函数系统采用确定性算法与随机性算法相结合。“确定性”指用以迭代的规则是确定性的，它们由一组仿射变换（如 R_1，R_2，R_3 等等）构成；“随机性”指迭代过程是不确定的，每一次迭代用哪一个规则（即选 R_i 中哪一个），不是预先定好的，而是随机的。设最终要生成的图形为 M，它要满足下述几何方程:

$$M = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_N \tag{3.8.1}$$

上式的含义是，随机地从 $R_i(i=1,\ \cdots,\ N)$ 中挑选一个迭代规则迭代一次，然后再随机地在 $R_i(i=1,\ \cdots,\ N)$ 中选一个规则迭代下一次，不断重复此过程，最后生成的极限图形 M 就是欲求的形态。

每个迭代规则 R_i 都是一个仿射变换。我们经常遇到的正交变换使图形刚性位移和旋转，但保持几何图形的度量性质（向量的夹角，点与点之间的距离，图形的面积等）不变；而仿射变换一般会改变图形中向量的夹角，点与点之间的距离，图形的面积等，但仿射变换不改变共线，平行，相交，共线点的顺序，中心对称，二次曲线的次数等。原来平行的线段，经仿射变换后仍然是平行的，但长度可能发生了变化，相互之间的距离也可能改变了。一个图形经仿射变换后面积变小了，则此变换是收缩的，如果变大了则是扩张的，若保持不变则是恒等的。这里只用到收缩性仿射变换，因为极限图形 M 应当是所有迭代 R_i 的吸引子，每个仿射变换是收缩性的才能保证迭代收敛到 M 上。

仿射变换是一种线性变换，在二维平面上进行讨论，二维仿射变换的形式为：

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{3.8.2}$$

上式中未知数有两个：x 和 y；系数有四个：a，b，c 和 d；常数有两个：e 和 f。二维仿射变换的另一种写法为：

$$R:\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \tag{3.8.3}$$

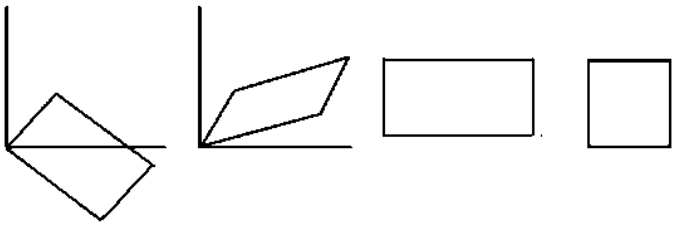
设平面上有面积区域为 D，经仿射变换后变成 D'，则 D 与 D'的面积(S)关系为:

$$S(D') = |\det(A)| \bullet S(D) \tag{3.8.4}$$

这里$|\det(A)|$表示矩阵 A 的行列式的绝对值，取为小于 1 的正数，其中 A 为系数矩阵，A 的意义可分解为旋转、扭曲、伸缩等，如：

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{tg}\alpha \\ \mathrm{tg}\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} \tag{3.8.5}$$

其中等式右边的第一项表示旋转，第二项表示扭曲，第三项表示伸缩。示意图如图 3.21 所示。而 e，f 为位移因子，使图形在 xy 面上平移。特殊情况下，当$|l_1| = |l_2| = r$，$\alpha = 0$ 时，它完成的仅仅是原图 S 的同样形状的缩放、旋转、平移等。



(a) 旋转　(b) 扭曲　(c) 伸缩　(d) 原图

图 3.21　矩阵 A 的意义

如果已知原图以及其变换图，可以求出其中的仿射变换系数。这只要确定原图中三点及其相应的变换图上三点坐标即可，示意图如图 3.22 所示。可以列出如下 6 个方程，解方程

组求变换系数 a，b，c，d，e，f。

$$\left.\begin{aligned} ax_1+by_1+e=r_1 \\ ax_2+by_2+e=r_2 \\ ax_3+by_3+e=r_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a,b,e \tag{3.8.6}$$

$$\left.\begin{aligned} cx_1+dy_1+f=s_1 \\ cx_2+dy_2+f=s_2 \\ cx_3+dy_3+f=s_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c,d,f \tag{3.8.7}$$

对于不同的 $R_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$，有相应的 A_i（由 a_i，b_i，c_i，d_i 组成），相应的常数 e_i 和 f_i。通常 N 取 2，3，4，有时高达 16。

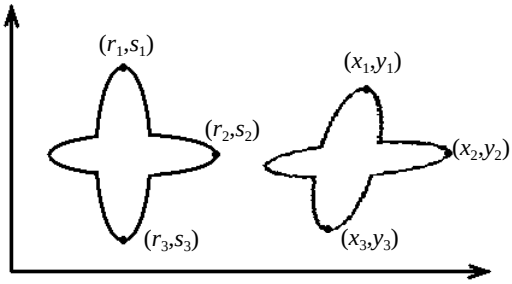


图 3.22　求仿射变换系数示意图

剩下的一个问题是怎样实现随机操作。在计算机上可以很容易地用赝随机数发生器不断生成随机数。不失一般性，设 $N=4$，每次用计算机生成一个随机数 $E\in(0,100)$，设 $0<\beta_1<\beta_2<\beta_3<1$，作如下规定：

若 $0<E<\beta_1$，　则选择规则 R_1，
若 $\beta_1<E<\beta_2$，　　则选择规则 R_2，
若 $\beta_2<E<\beta_3$，　　则选择规则 R_3，
若 $\beta_3<E<100$，　　则选择规则 R_4，

指定 β_i 的过程，相当于为每一种迭代规则 R 指派一个概率 p_i。虽说具体每一次用哪个规则迭代不确定，但从长期行为看，每种规则使用的频率是一定的。当然这种概率可以随意指定，但是为了使得迭代高效、迅速，概率的大小应与仿射变换的图形压缩率成正比。图形压缩率就是前文说的 $|\det(A)|$，对于 $N=4$ 的情况，它有 4 个。一般 p_i 可由下面方法确定。

$$P_i=\frac{|\det A_i|}{\sum_{i=1}^{N}|\det A_i|}=\frac{|a_id_i-b_ic_i|}{\sum_{i=1}^{N}|a_id_i-b_ic_i|} \tag{3.8.8}$$

若某个 $|\det A_i|=0$，则实际操作时可把该 p_i 设成一个较小的正数，如 0.00001。

至此可以知道，每一种规则 R_i 都包括 7 个参数，a_i，b_i，c_i，d_i，e_i，f_i，p_i，要求 $p_1+p_2+\cdots+p_N=1$，如果生成某种植物形态需要 4 种规则，则共有 28 个参数。只要给定了这些参数，实际上极限图形 M 就完全确定了，这样的系统称为随机迭代函数系统。

图 3.23 和图 3.24 分别是用 IFS 方法生成的 Levy 曲线和分形树，参数如表 3.3 和表 3.4 所示。图 3.25 是用 IFS 方法生成的 Barnsley 羊齿叶，参数可参见表 3.5。当参数改变如 b 增大时相当于叶子高处其横向的摆动增大，d 的减小反映了树叶整体高度的减小，若仅改变了各个概率 p_i，可发现吸引子形状不变而吸引子中点的疏密度会发生变化。表 3.6 和表 3.7 中还列出了 Sierpinski 地毯和 Flamboyent 皇冠的变换参数以供大家参考。

图 3.23　Levy 曲线

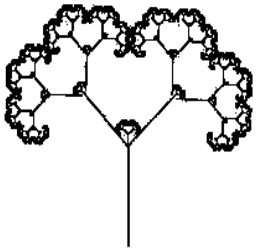


图 3.24　分形树

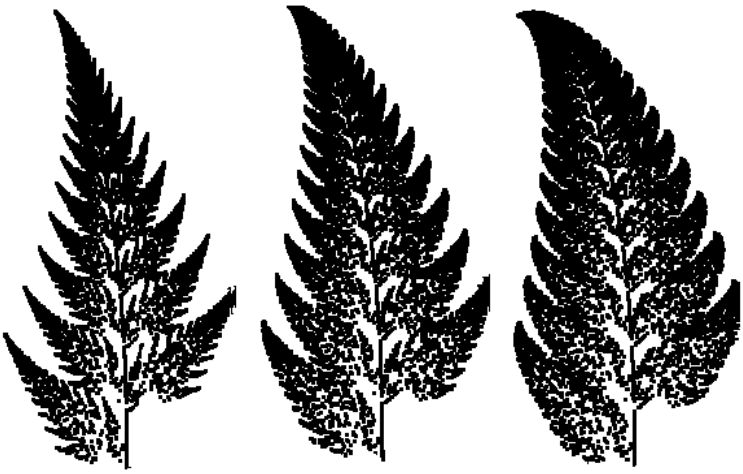


图 3.25　Barnsley 羊齿叶

表 3.3　Levy 曲线

Rule	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	–0.5	0.5	0.5	0	0	0.5
2	0.5	0.5	–0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

表 3.4　分形树

Rule	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0	0	0.5	0	0	0.05
2	0.42	–0.42	0.42	0.42	0	0.2	0.4
3	0.42	0.42	–0.42	0.42	0	0.2	0.4
4	0.1	0	0	0.1	0	0.2	0.15

表 3.5　Barnsley 羊齿叶的参数

Rule	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	0.04	–0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	–0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	–0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

表 3.6　Sierpinski 地毯

Rule	a	b	c	d	e	f	p
1	1/2	0	0	1/2	0	0	1/3
2	1/2	0	0	1/2	1/4	$3^{0.5}/4$	1/3
3	1/2	0	0	1/2	1/2	0	1/3

表 3.7　Flamboyent 皇冠

Rule	a	b	c	d	e	f	p
1	0.25	0	0	0.5	0	0	0.154
2	0.5	0	0	0.5	–0.25	0.5	0.307
3	–0.25	0	0	–0.25	0.25	1	0.078
4	0.5	0	0	0.5	0	0.75	0.307
5	0.5	0	0	–0.25	0.5	1.25	0.154

参　考　文　献

[1] B.B.Mandelbrot，The Fractal Geometry of Nature，New York，Freeman(1982)

[2] B.B.Mandelbrot，Fratcals：Form，Chance and Dimension，San Francisco，Freeman(1977)

[3] J.Feder, Fractals. Plenum Press, New York and London(1988)

[4] 郝柏林，从抛物线谈起——混沌动力学引论，上海科技出版社(1993)

[5] 赵凯华，朱照宣，黄畇，非线性物理导论，北京大学非线性科学中心(1992)

[6] 泽仑著，黄畇译，非晶态固体物理，北京大学出版社(1988)

[7] N.Madras，A.D.Sokal，J. Stat. phys.50(1988)109

[8] T.A. Witten，L.M. Sander，Phys. Rev. Lett., 47(1981)1400

[9] J.G.Hou，Z.Q.Wu，Phys. Rev.，B 42(1990)3274

[10] 王晓平，吴自勤，物理，28(1999)342

[11] B. Q. Li，Z. Q. Wu，Phys. Rev.，B 47(1993)3638

[12] B.Mandelbrot et al., Nature, 308(1984)721

[13] R.Barberi et al., J.Phys.C, 6(1994)A275

[14] 龙期威，金属中的分形与复杂性，上海科学技术出版社(1999)

[15] J.Z.Duan，Z.Q.Wu，J. Microscopy，148(1987)149~155

[16] B.Dubuc et al.，Phys. Rev. A39(1989)1500

[17] L.Spanos，E.A. Irene，J. Vac. Sci. Technol.，A 12(1994)2646

[18] D. Avnir et al.，Science，279(1998)39

[19] O.Malcai et al.，Phys. Rev. E 56(1997)2817

[20] A.Lindenmayer，Journal of Theoretical Biology，18(1968) 280; 300

[21] A.Smith，Computer Graphics 1(1984)1

[21] P.Prusinkiewicz, In proceedings of Graphics Interface ’86 – vision Interface’ 86, 247~253，CIPS(1986)

[22] 刘华杰，分形艺术，湖南科学技术出版社(1998)

[23] 王东生，曹磊，混沌、分形及其应用，中国科学技术大学出版社(1995)

[24] 陈天滋，李峰，计算机应用研究，17(2000)74

[25] M.F.Barnsley，S.Demko，In Proc.Royal Soc. London A399(1985)243

[26] M.F.Barnsley，S.Demko，Lecture Notes in Math 1105(1984)73